

2020学年第二学期杭州市高三年级教学质量检测

数学试题卷

考生须知:

1. 本试卷分试题卷和答题卷两部分. 满分150分, 考试时间120分钟.
2. 请用黑色字迹的钢笔或签字笔在答题卡指定的区域(黑色边框)内作答, 超出答题区域的作答无效!
3. 考试结束, 只需上交答题卡.

选择题部分(共40分)

一、选择题: 本大题共10小题, 每小题4分, 共40分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $B = \{x | y = \lg(x-1)\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x | -1 < x < 2\}$

B. $\{x | 1 < x < 2\}$

C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$

D. $\{x | 0 \leq x < 2\}$

2. 设复数 z 满足 $z \cdot (3-i) = 10$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ ()

A. 3

B. 4

C. $\sqrt{10}$

D. 10

3. 设 a, b 是非零向量, 则“ $a \perp b$ ”是“函数 $f(x) = (xa+b) \cdot (xb-a)$ 为一次函数”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

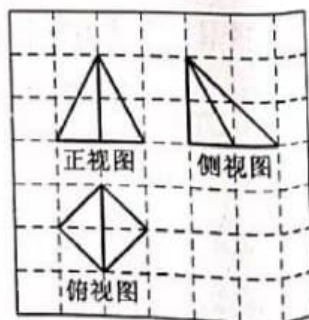
4. 某四棱锥的三视图(图中每个小方格的边长为1)如图所示, 则该四棱锥的体积为 ()

A. 4

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 1



(第4题)

5. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} 3x - y - 6 \leq 0, \\ 2x - y - 3 \geq 0, \\ x + y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x - y$ ()

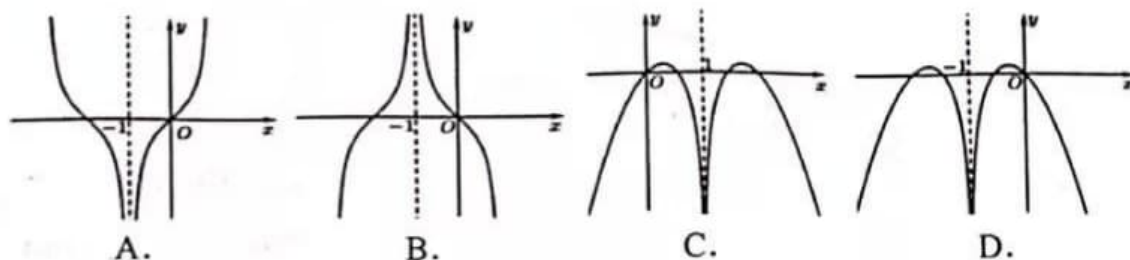
A. 有最小值 2

B. 有最大值 3

C. 有最小值 1

D. 有最大值 2

6. 函数 $f(x) = \ln|x+1| - x^2 - 2x$ 的图象大致是 ()



7. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两个焦点, 以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2 . 若边 MF_1 的中点在双曲线上, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $4 + 2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\sqrt{3} + 1$

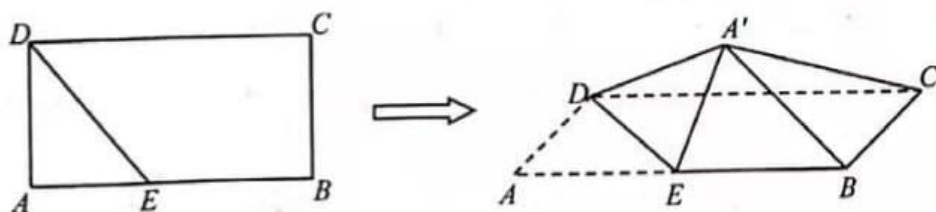
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n-1} = a_n + a_{n-2}$ ($n \geq 3$), 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_{2020} = 2019, S_{2019} = 2020$, 则 $S_{2021} =$ ()

- A. 1008 B. 1009 C. 2016 D. 2018

9. 已知函数 $f(x) = ae^x - \frac{a}{12}x^3 - ax - 2$ ($a > 0$). 若函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(f(x))$ 有相同的最小值, 则 a 的最大值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB = \frac{\sqrt{15}}{2}, AD = 1$, 点 E 在线段 AB (端点除外) 上, 现将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起为 $\triangle A'DE$. 设 $\angle ADE = \alpha$, 二面角 $A'-DE-C$ 的大小为 β , 若 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 则四棱锥 $A'-BCDE$ 体积的最大值为 ()



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{15}-1}{12}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$

非选择题部分 (共 110 分)

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分.

11. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & (x \geq 0) \\ -x + 1, & (x < 0) \end{cases}$, 则 $f(2) =$ _____; 若 $f(\alpha) = 2$, 则 $\alpha =$ _____.

12. 已知 $(x+a)^3(x+1)^4$ 的展开式中所有项的系数之和为 16, 则 $a=$ _____, x^4 项的系数为_____.

13. 设 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边, $\frac{a+c}{b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}$. 若 $a=1, c=\sqrt{7}$, 则 $C=$ _____, $\triangle ABC$ 的面积=_____.

14. 甲从装有除颜色外完全相同的 3 个白球和 m 个黑球的布袋中随机摸取一球, 有放回的摸取 3 次, 记摸得白球个数为 X . 若 $E(X)=\frac{9}{5}$, 则 $m=$ _____, $P(X=2)=$ _____.

15. 已知 x, y, z 为正实数, 且 $x^2+y^2+z^2=1$, 则 $\frac{(z+1)^2}{2xyz}$ 的最小值为_____.

16. 已知 a, b 是单位向量, 且 $a \perp b$. 设 $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=b, \overrightarrow{OC}=ma+nb$ ($m \geq n > 0$), 若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 则 $m=$ _____.

17. 已知 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, 过 F 作斜率为 k_1 的直线和抛物线交于 A, B 两点, 延长 AM, BM 交抛物线于 C, D 两点, 直线 CD 的斜率为 k_2 . 若 $M(4, 0)$, 则 $\frac{k_1}{k_2}=$ _____.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (本题满分 14 分) 设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x \cos x + \sin^2 x - \frac{1}{2}$.

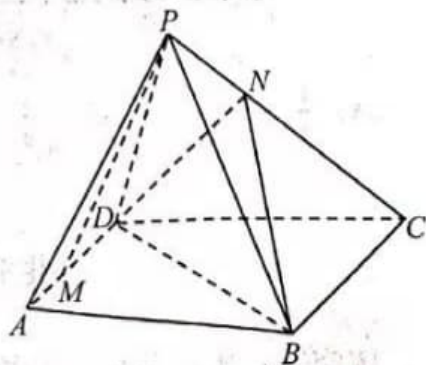
(I) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 若 $A \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$, $f(A)=\frac{1}{3}$, 求 $\cos(2A - \frac{5\pi}{6})$ 的值.

19. (本题满分 15 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PBC$ 为正三角形, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ADC=90^\circ$, $AD=CD=3$, $BC=4$, 点 M, N 分别在线段 AD 和 PC 上, 且 $\frac{DM}{AM} = \frac{CN}{PN} = 2$.

(I) 求证: $PM \parallel$ 平面 BDN ;

(II) 设二面角 $P-AD-B$ 为 θ . 若 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.



(第 19 题)

20. (本题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 满足 $a_n = 2^{n-2}$, $b_{2k-1} = a_k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), b_{2k-1} , b_{2k} , b_{2k+1} 成等差数列.

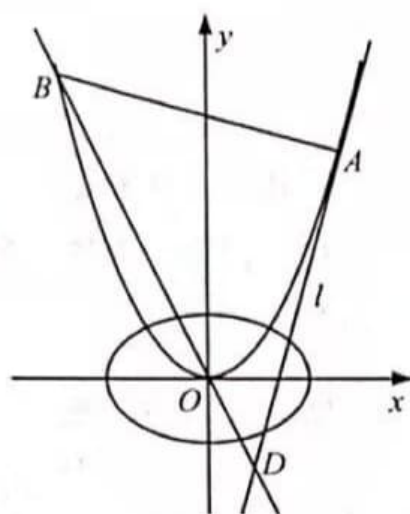
(I) 证明: $\{b_{2k}\}$ 是等比数列;

(II) 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{n+2}{8n(n+1)(b_{2n}-b_{2n-1})}$, 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n .

21. (本题满分 15 分) 如图, 已知抛物线 $C_1: x^2 = y$ 在点 A 处的切线 l 与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 相交, 过 A 作 l 的垂线交抛物线 C_1 于另一点 B , 直线 OB (O 为直角坐标系原点) 与 l 相交于点 D , 记 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 且 $x_1 > 0$.

(I) 求 $x_1 - x_2$ 的最小值;

(II) 求 $\frac{|DO|}{|DB|}$ 的取值范围.



(第 21 题)

22. (本题满分 15 分) 已知函数 $f(x) = a \ln(x+1)$ ($a > 0$), $g(x) = \frac{2x}{x+2}$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求证: 对任意 $x > 0$, $f(x) > g(x)$.

(II) 若函数 $f(x)$ 图像上不同两点 P, Q 到 x 轴的距离相等, 设 $f(x)$ 图像在点 P, Q 处切线交点为 M , 求证: 对任意 $a > 0$, 点 M 在第二象限.

2020 学年第二学期杭州市高三年级教学质量检测

数学参考答案及评分标准

选择题部分（共40分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	B	C	B	D	D	B	B	A

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 4; 1 或 -1 12. 0, 4 13. $\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 14. 2, $\frac{54}{125}$

15. $3+2\sqrt{2}$ 16. 1 或 2 17. 4

三、解答题：（本大题共 5 小题，共 74 分），解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18.（本题满分 14 分）

(I) 因为 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

因为 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,

解得 $k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间 $(k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}), k \in \mathbb{Z}$7 分

(II) $f(A) = \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$, 令 $\theta = 2A - \frac{\pi}{6}$, 则 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\sin \theta = \frac{1}{3}$, $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

则 $\cos\left(2A - \frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) = \cos \theta \cos \frac{2}{3}\pi + \sin \theta \sin \frac{2}{3}\pi$

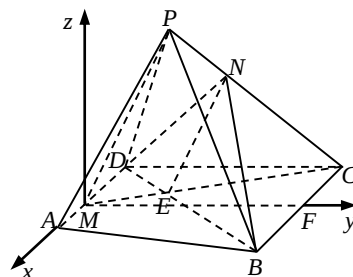
$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6}$7 分

19.（本题满分 15 分）

(I) 连接 CM 交 BD 于 F , 连接 EN ,

因为 $\frac{CE}{EM} = \frac{DM}{AM} = 2$,

所以 $\frac{CE}{EM} = \frac{CN}{NP} = 2$,



（第 19 题）

所以 $EN \parallel PM$, 又以为 $EN \subset$ 平面 BDN , $PM \not\subset$ 平面 BDN ,
所以 $PM \parallel$ 平面 BDN7 分

(II) 取 BC 中点 F , 易知 $AD \perp MF$, $AD \perp PF$,

所以 $AD \perp$ 平面 PMF , 所以 $AD \perp PM$, 建立如图所示的空间直角坐标系 $M-xyz$.

则 $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(-2, 3, 0)$, $P(0, 1, 2\sqrt{2})$,

则 $\overrightarrow{AP} = (-1, 1, 2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{BP} = (-2, -2, 2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{CB} = (4, 0, 0)$,

设平面 PBC 法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -2x - 2y + 2\sqrt{2}z = 0 \\ 4x = 0 \end{cases},$$

取 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{2}y, 1)$, 设 PA 与平面 PBC 所成角的 θ ,

$$\text{则} \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AP} \rangle| = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

所以 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$8 分

20. (本题满分 15 分)

(I) 由 $a_n = 2^{n-2}$, $b_{2k-1} = a_k$,

得 $b_{2k-1} = 2^{k-2}$,

又因为 b_{2k-1} , b_{2k} , b_{2k+1} 成等差数列, 得 $b_{2k} = 3 \cdot 2^{k-3}$,

$$\text{即} \frac{b_{2k}}{b_{2k-2}} = 2,$$

所以 $\{b_{2k}\}$ 是首项为 $\frac{3}{4}$, 公比为 2 的等比数列.8 分

(II) 因为 $b_{2n} - b_{2n-1} = 3 \cdot 2^{n-3} - 2^{n-2} = 2^{n-3}$,

$$\text{所以} C_n = \frac{n+2}{(n+1)n \cdot 2^n} = \frac{2(n+1)-n}{(n+1)n \cdot 2^n} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}, \quad (n \geq 1),$$

$$\text{所以} S_n = \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^1} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}. \quad \text{.....7 分}$$

21. (本题满分 15 分)

(I) 点 A 处切线 l 方程: $y = 2x_1x - x_1^2$, 与椭圆 C_2 方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 联立,

得 $(1+8x_1^2)x^2 - 8x_1^3x + 2x_1^4 - 2 = 0$, 因为 l 与椭圆 C_2 相交,

故方程判别式 $\Delta = 64x_1^6 - 4(1+8x_1^2)(2x_1^4 - 2) > 0$, 求得 $0 < x_1^2 < 4 + \sqrt{17}$,

则 AB 直线方程为: $y = -\frac{1}{2x_1}x + x_1^2 + \frac{1}{2}$, 与抛物线方程 $y = x^2$ 联立, 可得

$$2x_1x^2 + x - 2x_1^3 - x_1 = 0, \text{由韦达定理, 可得} x_2 = -x_1 - \frac{1}{2x_1},$$

所以 $x_1 - x_2 = 2x_1 + \frac{1}{2x_1} \geq 2$, 当且仅当 $x_1 = \frac{1}{2}$ 时, $x_1 - x_2$ 取得最小值 2.7 分

(II) 记点 O, B 到直线 l 的距离分别为 d_1, d_2 .

$$\text{则 } d_1 = \frac{x_1^2}{\sqrt{1+4x_1^2}}, \quad d_2 = \sqrt{1+\frac{1}{4x_1^2}} \cdot |2x_1 + \frac{1}{2x_1}| = \sqrt{1+4x_1^2} \cdot (\frac{1+4x_1^2}{4x_1^2}),$$

$$\text{所以 } \frac{|DO|}{|DB|} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{4x_1^4}{(1+4x_1^2)^2} = \frac{4}{(\frac{1}{x_1^2}+4)^2}$$

因为 $0 < x_1^2 < 4 + \sqrt{17}$, 所以 $\frac{1}{x_1^2} + 4 > \sqrt{17}$,

$$\text{故 } \frac{|DO|}{|DB|} = \frac{4}{(\frac{1}{x_1^2}+4)^2} \in (0, \frac{4}{17}). \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

22. (本题满分 15 分)

(I) 当 $a=1$ 时, 设 $h(x) = f(x) - g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$,

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2},$$

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 单调递增.

所以 $x > 0$ 时, $h(x) > h(0) = 0$, 不等式 $f(x) > g(x)$ 得证. \dots\dots 7 \text{ 分}

(II) 由 P, Q 到 x 轴的距离相等, 且 $f(x) = a \ln(x+1)$ 的单调知 P, Q 的纵坐标相反,

故设 $P(e^{\frac{m}{a}} - 1, m)$, $Q(e^{-\frac{m}{a}} - 1, -m)$, 不妨设 $m > 0$.

$$\text{则点 } P \text{ 处切线方程为 } y = \frac{a}{e^{\frac{m}{a}}} (x - e^{\frac{m}{a}} + 1) + m,$$

$$\text{则点 } Q \text{ 处切线方程为 } y = \frac{a}{e^{-\frac{m}{a}}} (x - e^{-\frac{m}{a}} + 1) - m.$$

$$\text{联立两直线方程, 可得 } M \text{ 交点 } x_0 = \frac{2\frac{m}{a}}{e^{\frac{m}{a}} - e^{-\frac{m}{a}}} - 1, \quad y_0 = ae^{\frac{m}{a}} (\frac{2\frac{m}{a}}{e^{\frac{m}{a}} - e^{-\frac{m}{a}}} - e^{-\frac{m}{a}}) - m$$

$$\text{设 } \frac{m}{a} = t > 0, \text{ 则 } x_0 = \frac{2t}{e^t - e^{-t}} - 1, y_0 = a[(\frac{2te^t}{e^t - e^{-t}} - 1) - t],$$

要证 M 在第二象限, 即证: $x_0 < 0, y_0 > 0$.

$$\text{要证 } x_0 = \frac{2t}{e^t - e^{-t}} - 1 < 0, \text{ 即证 } e^t - e^{-t} - 2t > 0, \text{ 设 } F(t) = e^t - e^{-t} - 2t,$$

则 $F'(t) = e^t + e^{-t} - 2 > 0$, 故 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $t > 0$ 时, $F(t) > F(0) = 0$, 即证 $x_0 < 0$.

$$\text{要证 } y_0 = a[(\frac{2e^t t}{e^t - e^{-t}} - 1) - t] > 0, \text{ 即证: } \frac{2e^t}{e^t - e^{-t}} > \frac{t+1}{t},$$

$$\text{只要证 } \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} > \frac{1}{t}, \text{ 即证: } \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} > \frac{1}{t}. \text{ 设 } e^{2t} = n > 1, \text{ 则 } t = \frac{\ln n}{2},$$

则 $\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1} > \frac{1}{t}$ 等价于 $\frac{n+1}{n-1} > \frac{2}{\ln n}$, 只需证 $\ln n > \frac{2(n-1)}{n+1}$,

且由 (I) 知, $x > 0$ 时, $\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2}$,

则有 $n > 1$ 时, $\ln n > \frac{2(n-1)}{n+1}$, 故 $y_0 > 0$ 得证.

所以对任意 $a > 0$, 点 M 在第二象限.

.....8 分